

Spectral modelling of nonlinear waves on arbitrary water depth based on a new wave equation

# 新たな波動方程式に基づく任意水深非線形スペクトル波動モデル

Kazuo Nadaoka

Serdar BEJI\*・灘岡和夫\*\*

## 1. はじめに

近年 Boussinesq タイプの方程式に基づく非線形波浪計算が盛んに行われるようになってきているが、基本的に方程式の適用範囲が浅水域に限られることから、最近、その適用範囲を広げる試みがいくつかなされている (Madssenら, 1991; Nwogu, 1993, 等)。一方, Freilich・Guza (1984) に代表されるような, Boussinesq タイプの方程式をスペクトル法で解く試みもいくつか行われている。特に, Mase・Kirby (1992) は, KdV 方程式の適用範囲を深水域まで広げ、同時に砕波モデルも組み込むことにより、砕波を含む非線形浅水変形スペクトル計算を可能にしている。しかし、多分に heuristic なアプローチでのモデル化であることから、非線形項が水深  $h \rightarrow \infty$  でゼロになるといった理論的な難点が含まれている。

本論文では、最近灘岡らによって導出された波動モデルのうち、単一方向波に対する 1 方程式バージョン (灘岡ら, 1994; Nadaoka ら, 1994; 灘岡, 1995; Beji・Nadaoka, 1995) をベースとした定式化により、このような難点のない、より一般的な任意水深非線形スペクトル波動モデルを提案する。また、新たに、任意水深での砕波減衰モデルを考案し、このスペクトルモデル中に組み込むことを試みた結果について述べる。そして、これらの妥当性を理論および実験値との比較を通して実証した結果について示す。

## 2. スペクトルモデルの理論とその検証

### (1) 理論

ここでのスペクトルモデルのベースとした波動方程式は、上記の灘岡らの波動モデルのうちの、以下に示す、単一方向波に対する 1 方程式バージョンである。

$$C_g \eta_t + \frac{1}{2} C_p (C_p + C_g) \eta_x - \frac{(C_p - C_g)}{k^2} \eta_{xxx} - \frac{C_p (C_p - C_g)}{2k^2} \eta_{xxx}$$

$$+ \frac{1}{2} [C_p (C_g)_x + (C_p - C_g) (C_p)] \eta + \frac{3}{4} g \left( 3 - 2 \frac{C_g}{C_p} - \frac{k^2 C_p^4}{g^2} \right) (\eta^2)_x = 0 \quad \dots\dots (1)$$

ここに、 $x, z$ : 水平・鉛直方向、 $\eta$ : 自由表面変位で、また  $k$  と  $C_p, C_g$  は、卓越周波数  $\omega$  と局所的な水深  $h$  から線形分散関係式により決まる波数と位相速度及び群速度である。この波動方程式は、浅水波条件のもとで KdV 方程式となり、深水波条件では 2 次の Stokes 波をその解に含むことが理論的に示されており、浅水波から深水波にわたる任意水深における狭帯域スペクトル波動場を記述し得る波動モデルとなっている。

上式のスペクトル解法として、自由表面変動  $\eta$  を、空間に関して変化する振幅  $A_n(x)$  および波数  $k_n(x)$  を用いてフーリエ展開によって記述する ( $\omega_n$  は対応する調和角周波数)。

$$\eta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(x) \exp i \left( \omega_n t - \int k_n(x) dx \right) \dots (2)$$

ここで式 (2) を式 (1) に代入して  $A_n$  および  $k_n$  の 1 階微分までの項のみを残すと、以下のような各調和成分の空間変動を表す微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha \frac{da_n}{dx} &= -\beta a_n - \delta b_n \\ &+ \chi \sum_{m=1}^{N-n} \frac{1}{2} (k_{n+m} - k_m) (a_m b_{n+m} - a_{n+m} b_m) \\ &+ \chi \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{4} (k_{n-m} + k_m) (a_m b_{n-m} + b_m a_{n-m}) \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{db_n}{dx} &= -\beta b_n + \delta a_n \\ &- \chi \sum_{m=1}^{N-n} \frac{1}{2} (k_{n+m} - k_m) (a_m a_{n+m} + b_m b_{n+m}) \\ &- \chi \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{4} (k_{n-m} + k_m) (a_m a_{n-m} - b_m b_{n-m}) \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

ここで  $a_n$  および  $b_n$  は複素振幅  $A_n$  の実部および虚部、 $N$  は調和成分数である。また上式中の係数は  $k, C_p$  および  $C_g$  の関数で、以下のように定義される。

\* Ph.D イスタンブール工科大学准教授 造船・海洋工学科  
 \*\* 正会員 工博 東京工業大学教授 大学院情報理工学研究所情報環境工学専攻

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}C_p(C_p + C_g) - 2\omega_n \frac{k_n^4}{k^2}(C_p - C_g) \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{k_n^2}{k^2} C_p(C_p - C_g) \\ \beta &= \frac{1}{2}[C_p(C_p)_x + (C_p - C_g)(C_p)_x] \\ &\quad + \left(\frac{3}{2}k_n C_p - \omega_n\right) \frac{(C_p - C_g)}{k^2} (k_n)_x \\ \delta &= \omega_n C_g + (C_p - C_g)(k_n C_p - \omega_n) \frac{k_n^2}{k^2} \\ \chi &= \frac{3}{2}g \left(3 - 2\frac{C_g}{C_p} - \frac{k^2 C_p^4}{g^2}\right) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここでは、Bulirsch・Stoer (1966) の方法により、式 (3) および (4) の数値解を求めた。

(2) 理論の検証

ここで、このスペクトルモデルの基本的な妥当性を検証するために、その線形浅水変形特性をチェックすると同時に、非線形波の理論値及び実験値との比較を行った。図-1 は、本モデルの線形浅水変形特性を検証したもので、勾配 1/50 の一様斜面上 (沖側と岸側端の水深: 30 m, 10 m) での周期  $T=5, 9, 12$  s の場合の結果を通常の線形理論と比較している。これから本モデルの線形浅水変形特性が周期に関わらず線形理論と完全に一致してことがわかる。つぎに、非線形波に対する適応性を調べるために、まず、 $kH=0.7, h/L=2.5$  の 2 次の Stokes 波に対してシミュレーションを行ったところ、図-2 に示すように良い一致が得られた。さらに、台形潜堤を通過する周期  $T=1.25$  および、 $T=2.0$  s の単一周期波について、Beji・Battjes (1993) によって行われた室内実験結果との比較を行った ( $N$  は前者で 4、後者で 6 としている)。この場合も、それぞれ、図-3(a) と 3(b) に示すように、かなり良好な一致が得られている。

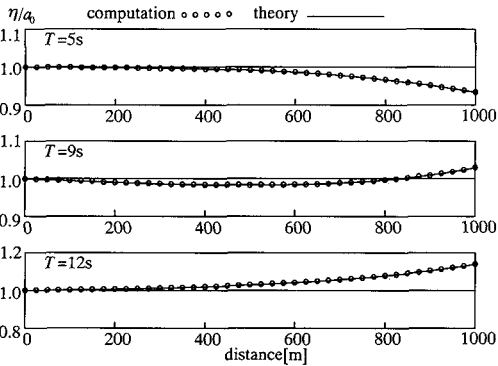


図-1 本モデルの線形浅水変形特性のチェック

3. 砕波減衰モデルの提案および検証

(1) 任意水深砕波減衰モデル

式 (3) と (4) のスペクトルモデルに、適当な減衰項を付加することにより、砕波の効果を表現することを考える。まず、次式で示される、Battjes (1986) による

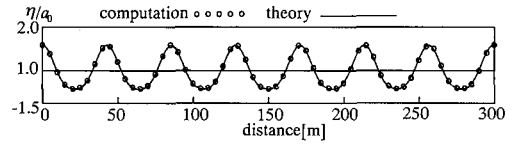
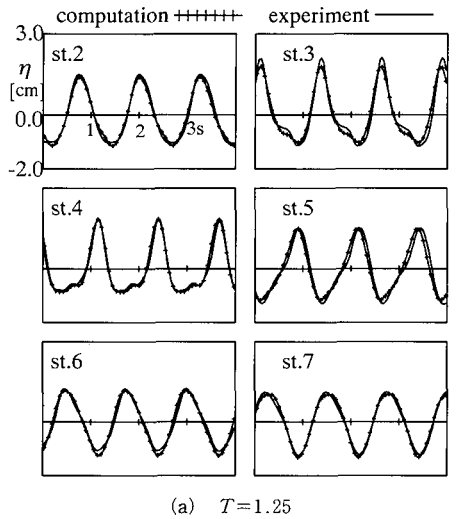
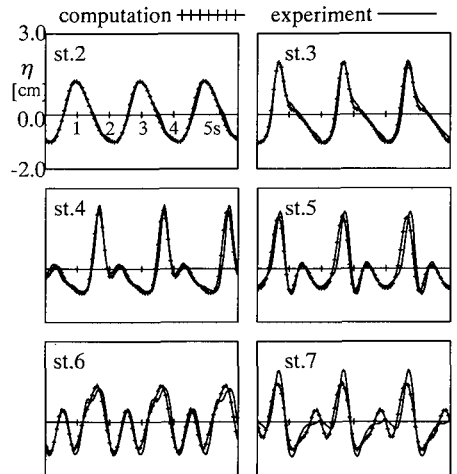


図-2 2 次の Stokes 波理論との比較 ( $kH=0.7, h/L=2.5$ )



(a)  $T=1.25$



(b)  $T=2.0$

図-3 Beji・Battjes (1993) の室内実験データとの比較

規則波の碎波モデルからスタートする。

$$\frac{\partial P}{\partial x} + D = 0,$$

ここに

$$D = \frac{D'}{cT} = \frac{B}{4\gamma^3} \frac{\rho g H^2}{T} \left(\frac{H}{h}\right)^4 \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\rho$ : 流体密度、 $g$ : 重力加速度、 $H$ : 波高、 $T$ : 周期、 $P = EC_g$ : エネルギーフラックス、 $B$ ,  $\gamma$ : パラメータ、である。いま、 $P$ に関する浅水波表現、

$$P = \frac{1}{8} \rho g H^2 \sqrt{gh} \dots\dots\dots (7)$$

に関して、それを  $x$  で微分すると、

$$P_x = \frac{1}{8} \rho g \sqrt{gh} \left( 2HH_x + \frac{1}{2} H^2 \frac{h_x}{h} \right) \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで、碎波減衰がなく  $P_x = 0$  である場合を考えると、式 (8) より、

$$(H^2)_x + \frac{1}{2} H^2 \left( \frac{h_x}{h} \right) = 0 \dots\dots\dots (9)$$

となるが、これから直ちに、 $H \propto h^{-1/4}$ 、すなわち Green の定理が得られる。これからもわかるように、 $1/2 \cdot H^2 \cdot h_x/h$  の項は線形浅水効果を表している。ところで、波動方程式 (1) は、すでに線形と非線形の両方の浅水効果を表現している。従って、スペクトルモデルに碎波減衰項を組み込む際には、式 (8) 中の線形浅水効果を表す右辺第 2 項をゼロとする必要がある。これより、

$$\frac{H_x}{H} = -\frac{B}{\gamma^3} \frac{1}{T\sqrt{gh}} \left(\frac{H}{h}\right)^4 \dots\dots\dots (10)$$

となる。

式 (6) あるいは式 (10) は、深水波に対して、 $H/h \rightarrow 0$ 、すなわち  $D \rightarrow 0$  となることから明らかなように、当然ながら、浅水波に対してのみ有効な表現であるが、これから以下のように、任意水深の場合に対しても有効な形に一般化することができる。まず、 $\sqrt{gh}$  については、線形理論による一般的な群速度表現  $C_g$  に置き換えることができる。より重要なファクターである  $(H/h)^4$  については、それが「碎波の程度」を表す指標になっているものと解釈することができるので、Miche の碎波基準に対応して、ここではこのファクターを  $(kH/\tanh kh)^4$  と置き換える (Beji, 1995 の議論を参照)。これは、浅水波極限で、 $\tanh kh \rightarrow kh$  より、 $(H/h)^4$  になることが簡単に確かめられる。一方で、深水波の極限では、このファクターは  $(kH)^4$  となる。したがって、この置き換えにより、碎波減衰項は、深水波において、波形勾配に依存したゼロではない減衰量を与える合理的な式形となる。そこで、ここでは式 (10) を任意水深に一般化したものとして、

以下の碎波減衰モデルを提案する。

$$\frac{H_x}{H} = -\frac{B}{\gamma^3} \frac{1}{TC_g} \left(\frac{gH}{C_p^2}\right)^4 \dots\dots\dots (11)$$

ただし上式では  $(kH/\tanh kh)$  と等価な表現である  $gH/C_p^2$  を用いている。

ここで、このような一般化に対して、そもそも、ここでの議論の出発点としている Battjes (1986) のモデルが hydraulic jump を想定したモデルであるので、深水域にまで拡張することには問題があるとの反論があるかもしれない。しかし、この Battjes (1986) のモデルは、次のような別の観点からの評価が可能である。すなわち、式 (6) を見ると、エネルギー減衰量が波高二乗値  $H^2$  すなわちエネルギーそのものに比例し、そこに「碎波の程度」を表す係数  $(H/h)^4$  が掛かった形になっている。これは、Battjes・Janssen (1978) の不規則波に対する減衰モデルと実質的にほとんど同じである。その場合には、「碎波の程度」を表す係数として、 $(H/h)^4$  の代わりに碎波確率パラメータ  $Q_b$  が導入されている。このような意味において、式 (11) は、単なる形式的な一般化ではなく、ある程度の意味づけを持った半経験的な碎波減衰モデルとなっている。

(2) スペクトルモデルへの組み込み方法

つぎに、この碎波減衰モデルを先のスペクトルモデルに導入することを考える。

まず、波動場が単純に、 $a(x) \cos \phi + b(x) \sin \phi$  ( $\phi$ : 位相角) で表されるものとする、式 (11) から次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{a_x}{a} &= -\frac{B}{\gamma^3} \frac{1}{TC_g} \left(\frac{gH}{C_p^2}\right)^4 \\ \frac{b_x}{b} &= -\frac{B}{\gamma^3} \frac{1}{TC_g} \left(\frac{gH}{C_p^2}\right)^4 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

しかし、これはもちろん単一正弦波成分だけで波動場が構成されている場合の表現であるので、任意のスペクトル成分を有する場合の与え方を考える必要がある。一つの簡単な方法は、各成分がそれぞれ式 (12) に従って減衰するものとする方法で、その考え方は、Beji・Battjes (1993) の室内実験データによって支持されている。この場合には、各スペクトル成分の碎波減衰表現は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{(a_n)_x}{a_n} &= -\frac{B}{\gamma^3} \frac{1}{TC_g} \left(\frac{gH}{C_p^2}\right)^4 \\ \frac{(b_n)_x}{b_n} &= -\frac{B}{\gamma^3} \frac{1}{TC_g} \left(\frac{gH}{C_p^2}\right)^4 \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、上式によってスペクトル計算を行う際に、右辺の波高  $H$  を評価する必要があるが、厳密には、各計算ステップで、物理空間上の波形を計算して波高値を抽出す

る必要があるけれども、一つの良い近似として、 $H \approx 2\sqrt{\Sigma(a_n^2 + b_n^2)}$  として  $H$  を見積もることができる。

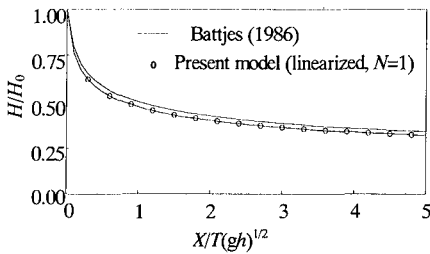
式 (13) を式 (3), (4) に組み込むことにより、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} \alpha \frac{da_n}{dx} = & -\beta a_n - \delta b_n - \alpha \frac{B}{\gamma^3} \frac{a_n}{TC_g} \left( \frac{gH}{C_p^2} \right)^4 \\ & + \chi \sum_{m=1}^{N-n} \frac{1}{2} (k_{n+m} - k_m) (a_m b_{n+m} - a_{n+m} b_m) \\ & + \chi \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{4} (k_{n-m} + k_m) (a_m b_{n-m} + b_m a_{n-m}) \\ & \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

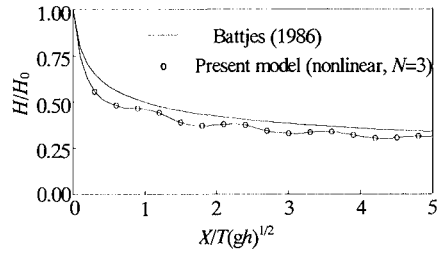
$$\begin{aligned} \alpha \frac{db_n}{dx} = & -\beta b_n + \delta a_n - \alpha \frac{B}{\gamma^3} \frac{b_n}{TC_g} \left( \frac{gH}{C_p^2} \right)^4 \\ & - \chi \sum_{m=1}^{N-n} \frac{1}{2} (k_{n+m} - k_m) (a_m a_{n+m} + b_m b_{n+m}) \\ & - \chi \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{4} (k_{n-m} + k_m) (a_m a_{n-m} - b_m b_{n-m}) \\ & \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

(3) 碎波減衰モデルの検証

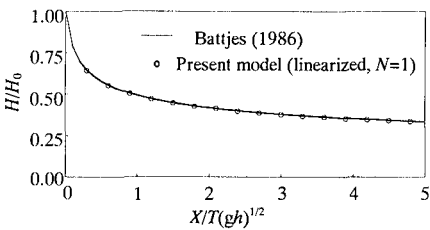
上記の碎波モデルの妥当性を検証するために、ここではまず、式 (6) の Battjes (1986) のモデルが水平床の場合に解析的に解けることから、その解析解と、まず式 (14), (15) で  $N=1$  とした線形化方程式の数値解とを比較した。ただし、式 (14), (15) のパラメータ  $B$  の値としては、Battjes (1986) が用いた  $B=2$  ではなく、 $B=1$  としている。これは、つねに、 $gH/C_p^2 > H/h$ ,  $\sqrt{gh} > C_g$  であることから、 $B=2$  とすると、碎波減衰量を過大に与えてしまうため、いくつかの試行計算よりパラメータを再設定した結果である。図-4a, b, c は、この比較を、Horikawa・Kuo (1966) の実験条件での3つの水深のケースに関して行った結果を示したものである。(Horikawa・Kuo (1966) の実験データに対して Battjes (1986) のモデルによる解析がほぼ一致することは、Battjes (1986) 自身によって示されている。) これを見ると両者の一致はきわめて良好で、このことから、式(14), (15) を導出する際の碎波モデル中に持ち込んだ仮定の妥当性



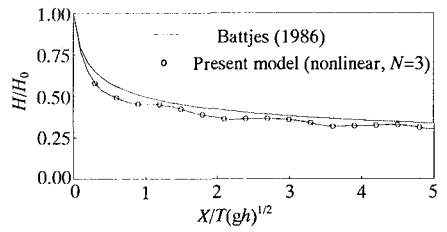
(a)  $h=12.5$  cm,  $H_0/h=0.8$



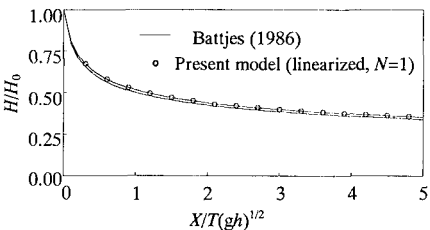
(a)  $h=12.5$  cm,  $H_0/h=0.8$



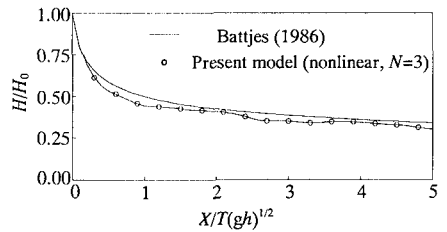
(b)  $h=10.0$  cm,  $H_0/h=0.8$



(b)  $h=10.0$  cm,  $H_0/h=0.8$



(c)  $h=7.5$  cm,  $H_0/h=0.8$



(c)  $h=7.5$  cm,  $H_0/h=0.8$

図-4 碎波減衰モデルの検証 ( $N=1$ )

図-5 碎波減衰モデルの検証 ( $N=3$ )

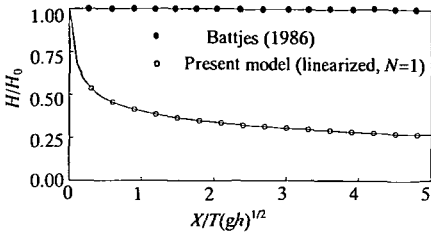


図-6 深水波での計算例( $kH=1.0$ ,  $h=1.0$  m,  $H/h=0.08$ )

が確認できる。次に、 $N=3$ として非線形計算を行った場合の比較を図-5(a), (b), (c)に示す。数値解は、解析解より若干値が下回っているものの、この場合も、十分な精度で一致していることがわかる。

最後に、深水波条件での計算結果について述べる。ここでは、 $kH=1$ というかなり波形勾配がきつい条件を初期値として計算を行っている。従って、ある程度の碎波減衰が生じることが考えられるが、同時に  $H/h=0.08$ の初期条件を与えているので、当然ながら碎波減衰に関する Battjes (1986) のオリジナルモデルで破碎は減衰しないことになる。図-6に本モデルでの計算結果 ( $N=1$ )を示すが、本モデルでは、かなりの碎波減衰を与える結果になっていることが分かる。ただし、深水波条件での実験データはほとんど存在しないため、ここでは、これ以上定量的な議論はできない。深水波条件での本モデルの適用性の定量的な検討は、今後の課題である。

#### 4. おわりに

本論文では、著者らが最近開発した新しい非線形分散性波動理論をベースとして、任意水深に適用可能なスペクトルモデルを理論的に導いた。さらに、Battjes(1986)の碎波減衰モデルに基づいて任意水深に適用可能なスペクトル減衰モデルを提案し、その基本的な妥当性を検証した。今後波より一般的な任意水深不規則波動場に対し

て、本モデルの適用性を確認していく予定である。

#### 参 考 文 献

- 灘岡和夫・Serdar Beji・大野修史 (1994): 新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法の確立と室内実験による検証, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 11-16.
- 灘岡和夫 (1995): 最近の非線形分散性波動理論の新展開, 水工学に関する夏期研修会講義集 B コース, pp. B-3-1-21.
- Battjes, J. A. (1986): Energy dissipation in breaking solitary and periodic waves, Comm. on Hydraulic and Geotech. Eng., Internal Report, Delft Univ. of Tech., Report nr. 86-5.
- Beji, S. and J. A. Battjes (1993): Experimental investigation of wave propagation over a bar, *Coastal Eng.*, 19, pp. 151-162.
- Beji, S. (1995): Note on a nonlinearity parameter of surface waves, *Coastal Eng.*, 25, pp. 81-85.
- Beji, S. and K. Nadaoka (1995): A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, submitted.
- Bulirsch, R. and J. Stoer (1966): Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods, *Numerische Mathematik*, 8, pp. 1-13.
- Freilich, M. H. and R. T. Guza (1984): Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 3, pp. 1-41.
- Horikawa, K. and C.-T. Kuo (1996): A study on wave transformation inside surf zone, *Proc. 10th Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp. 217-233.
- Madsen, P. A., R. Murray, and O. R. Sørensen (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, Vol. 15, pp. 371-388.
- Mase, H. and J. T. Kirby (1992): Hybrid frequency-domain KdV equation for random wave transformation, *Proc. 22th Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp. 474-487.
- Nadaoka, K., S. Beji and Y. Nakagawa (1994): A fully-dispersive weakly-nonlinear wave model and its numerical solutions, *Proc. 24th Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp. 427-441.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, 9-6, pp. 618-638.